PREMIERE EPREUVE A OPTION MATHÉMATIQUES
COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M - P

(3 h. Coeff 9)

La composition comprend deux problèmes indépendants.

PROBLEME 1

Les deux parties I, II sont indépendantes

E est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur un corps K.

I est la matrice unité $I = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$

On désignera les éléments de I par δ_{ij}

donc $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$: $\begin{cases} i \neq j & \delta_{ij} = 0 \\ i = j & \delta_{ii} = 1 \end{cases}$

I) E_k est le sous-ensemble de E contenant toutes les matrices dont les k premières colonnes sont identiques aux k premières colonnes de I ($1 \leqslant k \leqslant n$).

1°) Montrer que E_k est stable pour la multiplication matricielle.

2°) Montrer que si M appartient à E_k et est inversible on a: $M^{-1} \in E_k$.

3°) Si $A \in E$, on désigne par A_k la matrice obtenue en remplaçant les k premières colonnes de A par les colonnes correspondantes de I.

Montrer que si $A \in E$ et $U \in E_k$ on a : $(U.A)_k = U.A_k$.

A-t-on aussi l'égalité entre $(A.U)_k$ et $A_k.U$?

II) E'_k est le sous-ensemble des matrices de E obtenues en remplaçant dans la matrice I la k^{e} colonne par une colonne quelconque.

1°) Montrer que E'_k est stable pour la multiplication matricielle.

2°) Dans quels cas une matrice de E'_k est-elle inversible ? Montrer qu'alors son inverse appartient à E'_k.

.../...

3°) Calculer les valeurs propres d'une matrice quelconque de E'_k et les vecteurs propres correspondants.

Dans quels cas la matrice est-elle diagonalisable ?

PROBLEME 2

Soit un torseur $\mathcal{T}$.

$\mathcal{M}^t_M(\mathcal{T})$ désigne le moment de ce torseur en M.

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et I de coordonnées (2, 1, 1).

On donne :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^t_O(\mathcal{T}) = (\lambda + \mu - 5)\,\vec{i} + (2\mu - \lambda)\,\vec{j} + (2\lambda - 2)\,\vec{k} \\ \mathcal{M}^t_I(\mathcal{T}) = -\mu\,\vec{i} + (\lambda - \mu)\,\vec{j} + (\lambda - 3\mu)\,\vec{k} \end{cases}$$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

1°) Relation entre λ et μ pour que ces données soient compatibles ?

2°) On donne de plus, si J a pour coordonnées (0, 0, 1) :

$$\mathcal{M}^t_J(\mathcal{T}) = -\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

Déterminer λ et μ pour que les données soient compatibles.

3°) Montrer que le torseur $\mathcal{T}$ a parmi ses représentants un système réduit à un seul glisseur.

Définir ce glisseur.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail